

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή 7

Περιγραφή 13



Η ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 1

Ενότητα 1η: Εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση 17
Ενότητα 2η: Πολλαπλασιασμός με το 1 18
Ενότητα 3η: Διαίρεση με το 1 23
Ενότητα 4η: Διαιρέσεις με πηλίκο το 1 25
Ενότητα 5η: Εξασκούμαι σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις με το 1 28
Ενότητα 6η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στην προπαίδεια του 1 31



Η ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 10

Ενότητα 1η: Πολλαπλασιασμός με το 10 33
Ενότητα 2η: Διαίρεση με το 10 44
Ενότητα 3η: Η προπαίδεια του 10 στην καθημερινότητα 52
Ενότητα 4η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στην προπαίδεια του 10 55



Η ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 2

Ενότητα 1η: Οι μονοί και οι ζυγοί αριθμοί 57
Ενότητα 2η: Το μισό και το διπλάσιο 63
Ενότητα 3η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στους μονούς και τους ζυγούς αριθμούς και στο μισό και το διπλάσιο 71
Ενότητα 4η: Οι δίδυμοι αριθμοί 73
Ενότητα 5η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στους δίδυμους αριθμούς 80
Ενότητα 6η: Πολλαπλασιασμός με το 2 81

Ενότητα 7η: Διαίρεση με το 2 89
Ενότητα 8η: Αυτοματοποιώ την προπαίδεια του 2 91
Ενότητα 9η: Η προπαίδεια του 2 στην καθημερινότητα 100
Ενότητα 10η: Ώρα για επανάληψη 103
Ενότητα 11η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στην προπαίδεια του 2 106



Η ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 5

Ενότητα 1η: Εξερευνώ τη μέτρηση ανά 5 111
Ενότητα 2η: Πολλαπλασιασμός με το 5 119
Ενότητα 3η: Διαίρεση με το 5 125
Ενότητα 4η: Αυτοματοποιώ την προπαίδεια του 5 130
Ενότητα 5η: Υπολογίζω την επιφάνεια (ή το εμβαδόν) ορθογώνιων σχημάτων 139
Ενότητα 6η: Κάνω επανάληψη στους πολλαπλασιασμούς και στις διαιρέσεις με το 5 141
Ενότητα 7η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στην προπαίδεια του 5 148



Η ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 3

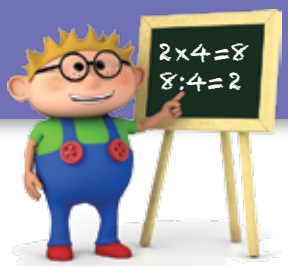
Ενότητα 1η: Πολλαπλασιασμός με το 3 151
Ενότητα 2η: Διαίρεση με το 3 161
Ενότητα 3η: Αυτοματοποιώ την προπαίδεια του 3 168
Ενότητα 4η: Η προπαίδεια του 3 στην καθημερινότητα 178
Ενότητα 5η: Θυμάμαι τις προπαίδειες του 1, του 2, του 5 και του 10 182
Ενότητα 6η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στην προπαίδεια του 3 και επανελέγχω τις γνώσεις μου στις προπαίδειες του 1, του 2, του 5 και του 10 188



Η ΠΡΟΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 4

Ενότητα 1η: Πολλαπλασιασμός με το 4 191
Ενότητα 2η: Διαίρεση με το 4 204
Ενότητα 3η: Αυτοματοποιώ την προπαίδεια του 4 209
Ενότητα 4η: Η προπαίδεια του 4 στην καθημερινότητα 219
Ενότητα 5η: Θυμάμαι τις προπαίδειες του 1, του 2, του 3, του 4, του 5 και του 10 227
Ενότητα 6η: Αξιολογώ τις γνώσεις μου στις προπαίδειες του 1, του 2, του 3, του 4, του 5 και του 10 233

Επίλογος 239



ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χαμηλή επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά αποτελεί σημαντικό πρόβλημα (Dowker, 2007), με το 21% των δωδεκάχρονων που αποφοιτούν από το δημοτικό σχολείο να μην έχουν κατορθώσει να κατακτήσουν το προσδοκώμενο μαθηματικό επίπεδο, και με το 5% να αποτυγχάνουν ακόμα και στην κατάκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων που αναμένεται από έναν επτάχρονο μαθητή (Gross, 2007). Το μέσο ποσοστό χαμηλής επίδοσης των δεκαπεντάχρονων μαθητών στα μαθηματικά στα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης παρέμεινε ουσιαστικά το ίδιο χαμηλό στις εξετάσεις διεθνούς αξιολόγησης PISA 2012 (22,1%) σε σύγκριση με τις εξετάσεις PISA 2009 (22,3%), γεγονός που αποτελεί ένδειξη ότι οι χώρες της Ε.Ε. δεν σημειώνουν επαρκή πρόοδο στην κατεύθυνση της μείωσης των χαμηλών αυτών ποσοστών. Το μέσο ποσοστό μαθητών με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά στις εξετάσεις PISA 2015 στην Ελλάδα ήταν 36%, ενώ στο σύνολο των μαθητών η Ελλάδα κατέλαβε την 32η θέση ανάμεσα στις 35 χώρες του Οργανισμού, υπογραμμίζοντας έτσι τη δυσκολία τους να αντεπεξέλθουν με επιτυχία σε δραστηριότητες που απαιτούν ανώτερη μαθηματική σκέψη και συλλογιστική ικανότητα, αλλά και σε καθημερινές περιστάσεις όπου καλούνται να αξιοποιήσουν σχολικές γνώσεις και δεξιότητες στα μαθηματικά με αυτόνομο και δημιουργικό τρόπο. Ειδικότερα, οι μαθητές που σημείωσαν χαμηλά σκορ στα Μαθηματικά φαίνεται πως αδυνατούν να υπολογίσουν την ακριβή τιμή πώλησης ενός αντικειμένου μετατρέποντας την αξία του σε άλλο νόμισμα, καθώς και να συγκρίνουν την τελική απόσταση δύο διαφορετικών διαδρομών (OECD, 2016).

Το πρόβλημα αυτό φαίνεται να διατηρείται και μετά την ενηλικίωση, και εκτιμάται ότι το ένα πέμπτο των ενηλίκων έχουν φτωχότερες αριθμητικές δεξιότητες από αυτές που απαιτούν οι καταστάσεις της καθημερινότητας (Williams et al., 2003). Τα παιδιά με χαμηλή μαθηματική επίδοση που ολοκληρώνουν το γυμνάσιο είναι περισσότερο πιθανό να είναι άνεργοι ή να λαμβάνουν χαμηλότερους μισθούς (Rivera-Batiz, 1992). Σε γενικές γραμμές, στον δυτικό κόσμο η μαθηματική ικανότητα θεωρείται κρίσιμης σημασίας στο να πετύχει κάποιος (Ancker & Kaufman, 2007), με τις ανεπαρκείς μαθηματικές δεξιότητες να έχουν μεγαλύτερη επίπτωση στις ευκαιρίες που προσφέρονται στη ζωή, συγκριτικά με τη χαμηλή επίδοση σε γραφή και ανάγνωση (Parsons & Bynner, 2005).

Οι δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίζει ένας μαθητής τυπικής ανάπτυξης στα Μαθηματικά μπορεί να οφείλονται σε πλήθος παραγόντων. Οι εγγενείς δυσκολίες, που πηγάζουν από τη φύση του ίδιου του μαθήματος, και η ανεπαρκής διδασκαλία του γνωστικού αντικειμένου, σε συνδυασμό με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας αλλά και τις αναχρονιστικές αντιλήψεις σε σχέση με τα Μαθηματικά, φαίνεται ότι αποτελούν τους κυριότερους. Ωστόσο, υπάρχουν και οι περιπτώσεις όπου οι δυσκολίες ενός μαθητή ενδέχεται να

οφείλονται σε μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά. Στην τελευταία περίπτωση, οι γνωστικές δεξιότητες που φαίνονται να είναι ελλειμματικές παρουσιάζουν μεγάλη ετερογένεια από άτομο σε άτομο (Karagiannakis, Baccaglini-Frank, & Roussos, 2017). Όμως, ανεξάρτητα από τη φύση των δυσκολιών, αξίζει να σημειωθεί ότι ενδεχόμενες αποτυχίες στις πρώτες τάξεις του δημοτικού, οι οποίες συχνά παγιώνονται με το πέρασμα του χρόνου λόγω της ιεραρχικής φύσης του μαθήματος των μαθηματικών, προκαλούν σοβαρό άγχος και αποστροφή στις επόμενες τάξεις, τη λεγόμενη *μαθηματικοφοβία*. Συνεπώς, είναι πολύ σημαντικό τυχόν δυσκολίες στα Μαθηματικά να αντιμετωπιστούν έγκαιρα και αποτελεσματικά από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Δημοτικού.

Η αποτελεσματική αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών και συνεπώς η βελτίωση των μαθηματικών επιδόσεων όλων των μαθητών συνιστούν διαρκή πρόκληση για την εκπαιδευτική κοινότητα, με τα μέλη της να ταλαντεύονται μεταξύ των παραδοσιακών δασκαλοκεντρικών μεθόδων διδασκαλίας και των καινοτόμων μαθητοκεντρικών μεθόδων διδασκαλίας.

Οι **δασκαλοκεντρικές μέθοδοι διδασκαλίας** στα Μαθηματικά βασίζονται στην επίδειξη από τον δάσκαλο συγκεκριμένων τεχνικών επίλυσης μιας άσκησης, τις οποίες ο μαθητής καλείται να αναπαραγάγει μέσω συγκεκριμένου τύπου ασκήσεων. Συγκεκριμένα, στα πλαίσια της δασκαλοκεντρικής διδασκαλίας, ο μαθητής αναμένεται να εφαρμόζει την τεχνική του δασκάλου συχνά μηχανικά και σε ατομική βάση με επαναλαμβανόμενες τυποποιημένες δραστηριότητες, προκειμένου να την κατακτήσει. Με άλλα λόγια, **δίνεται έμφαση στην αυτοματοποίηση της εκάστοτε διαδικασίας που οδηγεί στο σωστό αποτέλεσμα**. Για παράδειγμα, ζητείται από τον μαθητή να αποστηθίσει ότι $6 \times 8 = 48$ ή αλλιώς, αν δεν μπορεί να το παπαγαλίσει, να το υπολογίζει ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση όπου $6 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$.

Στον αντίποδα των παραπάνω, οι **μαθητοκεντρικές μέθοδοι διδασκαλίας** δεν επικεντρώνονται στη μονομερή παρουσίαση τεχνικών, αλλά προάγουν την ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης μέσω της ενεργού εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία (Clements & Battista, 1990) και συνεπώς συμβάλλουν στην καλλιέργεια της μαθηματικής τους σκέψης. Στόχος της μαθητοκεντρικής προσέγγισης είναι τα παιδιά να γνωρίσουν και να εξασκηθούν σε εναλλακτικές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, αφού όμως πρώτα τις κατανοήσουν, ώστε να είναι σε θέση να επιλέγουν κάθε φορά τη βέλτιστη λύση. Για παράδειγμα, ο μαθητής δεν είναι απαραίτητο να αποστηθίσει ότι $6 \times 8 = 48$, μιας και μέσω της μαθησιακής διαδικασίας ανακαλύπτει εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού των γινομένων της προπαίδειας, π.χ. $6 \times 8 = (5 \times 8) + (1 \times 8) = 40 + 8 = 48$ ή $6 \times 8 = (3 \times 8) + (3 \times 8) = 24 + 24 = 48$, με ενδεχόμενη χρήση εποπτικού υλικού. Συνεπώς, η μαθητοκεντρική διδασκαλία, *μετατοπίζοντας το βάρος από τη μηχανική εκτέλεση διαδικασιών στη βαθύτερη κατανόηση και συνειδητή εφαρμογή τους, προάγει την ευέλικτη και αυτόνομη μαθηματική σκέψη και όχι τη στείρα απομνημόνευση.*

Αν και τα ερευνητικά ευρήματα αναφορικά με το ποια από τις δύο παραπάνω προσεγγίσεις διδασκαλίας διασφαλίζει την υψηλότερη μαθηματική επίδοση είναι αμφιλεγόμενα, η μετα-ανάλυση που πραγματοποίησε ο Gersten και οι συνεργάτες τους (2009) προτείνει εφτά διδακτικές πρακτικές που αποδεικνύονται ιδιαίτερα αποτελεσματικές, ειδικά για τα παιδιά που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά. Αυτές είναι οι ακόλουθες:

- **Η ρητή ή σαφής διδασκαλία**: Ο εκπαιδευτικός έχει ένα ξεκάθαρο μοντέλο με συγκεκριμένα βήματα για να λύσει ένα πρόβλημα, σκεπτόμενος δυνατά και εξηγώντας με κατανοητό τρόπο τι κάνει. Διδάσκει τυχόν προαπαιτούμενες γνώσεις, παρουσιάζει πολλά παραδείγματα και παρέχει άμεση διορθωτική ανατροφοδότηση στους μαθητές την ώρα

της εξάσκησης. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι ο πολλαπλασιασμός είναι στην ουσία μια επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, δηλαδή ότι 4 ×6 (τέσσερα επί έξι) σημαίνει 6+6+6+6=24.

- **Η οπτική αναπαράσταση**: Ο εκπαιδευτικός κάνει χρήση οπτικών αναπαραστάσεων (σκίτσα, γραφικές αναπαραστάσεις), προκειμένου να εξηγήσει και να απλοποιήσει το πρόβλημα. Για παράδειγμα ο εκπαιδευτικός, για να εξηγήσει τον πολλαπλασιασμό 4 ×6 ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση, δείχνει την εικόνα  και ζητάει από τα παιδιά να βρουν έναν γρήγορο τρόπο για να υπολογίσουν τα πόδια που έχουν όλες οι μύγες μαζί. Αφού η μία μύγα έχει 6 πόδια, τότε οι 4 μύγες έχουν 6 + 6 + 6 + 6 ή αλλιώς 4 φορές από 6 πόδια, δηλαδή 24 πόδια.
- **Η λεκτικοποίηση**: Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τον μαθητή να διατυπώσει με δικά του λόγια τα βήματα μιας διαδικασίας, για παράδειγμα τι έκανε για να βρει πόσα πόδια έχουν οι μύγες του προηγούμενου ερωτήματος. Με αυτό τον τρόπο, οι μαθητές μοιράζονται τη μαθηματική τους σκέψη ελέγχοντας ταυτόχρονα κατά πόσο έχει νόημα.
- **Η χρήση πολλαπλών παραδειγμάτων.** Ο δάσκαλος επιλέγει και διατάσσει τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσει, με σκοπό να παρουσιάσει στους μαθητές τις διαφορετικές περιπτώσεις που υπάρχουν σε συγκεκριμένου τύπου ασκήσεις δίνοντας έμφαση στα κοινά τους χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, όταν ο δάσκαλος διδάσκει την έννοια της διαίρεσης θα πρέπει, εκτός από παραδείγματα με τέλεια διαίρεση (π.χ. 6:2) , να παρουσιάσει παραδείγματα με ατελείς διαιρέσεις (π.χ. 7 : 2), διαιρέσεις με διαιρέτη και διαιρετέο το 1 (π.χ. 1 : 2, 2 : 1), ακόμα και παραδείγματα με διαιρέτη και διαιρετέο το 0 (π.χ. 5 : 0, 0 : 5).
- **Τα ευρετικά μοντέλα και/ή η παρουσίαση πολλαπλών στρατηγικών**. Τα ευρετικά μοντέλα είναι μια μέθοδος η οποία μοντελοποιεί μια γενική προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων, εξισώσεων, νοερών υπολογισμών, κ.λπ. Για παράδειγμα, οι καρτέλες «Προπαίδεια» (συμπληρωμένη καρτέλα) και «Πυθαγόρειος πίνακας» (συμπληρωμένη καρτέλα) που συμπεριλαμβάνονται στο παρόν βιβλίο αποτελούν ευρετικά μοντέλα με τα οποία ο μαθητής μπορεί να μάθει την προπαίδεια βασιζόμενος σε άλλα γινόμενα που ήδη ξέρει ή ανακαλύπτοντας σχέσεις μεταξύ των γινομένων (π.χ. αντιμεταθετική ιδιότητα). Η παρουσίαση πολλαπλών στρατηγικών έγκειται στην παρουσίαση από τον δάσκαλο διαφορετικών τρόπων για την επίλυση του ίδιου προβλήματος. Για παράδειγμα, το 4 ×6 μπορεί να υπολογιστεί ως 4 ×6 = (2 ×6) + (2 ×6) = 12 + 12 = 24 ή 4 ×6 = (5 ×6) – (1 ×6) = 30 – 6 = 24 ή 4 ×6 = (4 ×3) + (4 ×3) = 12 + 12 = 24.
- **Η συνεχής ανατροφοδότηση**. Ο εκπαιδευτικός ή ο γονιός στέκεται δίπλα στο παιδί και συζητά μαζί του, παρατηρεί πώς ανταποκρίνεται στις δραστηριότητες, ρωτάει συνεχώς πώς έφτασε στο αποτέλεσμα, αναζητά την αιτία του λάθους μέσα από τη συζήτηση και του δίνει την ευκαιρία αυτοελέγχου και αυτοδιόρθωσης. Με άλλα λόγια λειτουργεί ως *προπονητής* και όχι ως αξιολογητής. Η πρακτική αυτή γίνεται ακόμα πιο αποτελεσματική όταν ο εκπαιδευτικός είναι ενημερωμένος αναφορικά με τον τρόπο που μαθαίνει κάθε μαθητής και το γενικότερο μαθηματικό του προφίλ.
- **Η διδασκαλία συνομηλίκων.** Τα παιδιά παρατηρούν και ανταλλάσσουν γνώμες γι' αυτό που βλέπουν, προσπαθούν μαζί να το εξηγήσουν, συζητούν πώς έλυσαν μια άσκηση, συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους, εξασκούνται εναλλάσσοντας ρόλους (π.χ. ο ένας απαντά και ο άλλος ελέγχει). Η έρευνα δείχνει πως είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική η διδασκαλία που παρέχεται από έναν μαθητή μεγαλύτερης τάξης (προπονητής) σε έναν μαθητή μικρότερης (Baker, Gersten, & Lee, 2002).

Οι δύο τόμοι του βιβλίου «**Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τον τρόπο που με βολεύει**» αξιοποιούν πλήρως τις παραπάνω τεχνικές διδασκαλίας μέσω δραστηριοτήτων που περιέχουν. Έτσι, στον εκπαιδευτικό που επιθυμεί να ακολουθήσει έναν εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας της προπαίδειας σε ατομική ή ομαδική βάση, ή και στον γονιό που προσπαθεί να βοηθήσει το παιδί του στο σπίτι, υλοποιώντας τις δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στους δύο αυτούς τόμους, δίνεται η δυνατότητα:

- να εφαρμόσει τη **ρητή διδασκαλία** (π.χ. Δραστηριότητα 9, σελ. 199),
- να παρουσιάσει την έννοια ή τη διαδικασία που θέλει μέσω **οπτικών αναπαραστάσεων** (π.χ. Δραστηριότητα 10, σελ. 199),
- να προκαλέσει τον μαθητή να **λεκτικοποιήσει** αυτό που επιχειρεί να μάθει (π.χ. Δραστηριότητα 2, σελ. 192-193),
- να παρουσιάσει **πολλαπλά παραδείγματα** (π.χ. Δραστηριότητα 7.4, σελ. 197),
- να χρησιμοποιήσει **ευρετικά μοντέλα** και να παρουσιάσει **διαφορετικές στρατηγικές** για έναν συγκεκριμένο τύπο ασκήσεων (π.χ. Δραστηριότητα 12, σελ. 201),
- να χρησιμοποιήσει συγκεκριμένες πρακτικές προκειμένου να λαμβάνει **συνεχή ανατροφοδότηση** από τον μαθητή (π.χ. Δραστηριότητα 7, σελ. 20),
- να προκαλέσει **διδασκαλία μεταξύ συνομηλίκων** (π.χ. Δραστηριότητα 4, σελ. 194).

Ωστόσο, καθεμία από τις παραπάνω τεχνικές διδασκαλίας που μπορεί να είναι ωφέλιμη για έναν μαθητή δεν είναι βέβαιο ότι μπορεί να λειτουργήσει και για τους υπόλοιπους, δεδομένου ότι καθένας έχει τα δικά του δυνατά και αδύναμα σημεία στα Μαθηματικά. Συνεπώς, αυτό που πρωτεύει είναι ο *προπονητής* να γνωρίζει τις ιδιαίτερες ανάγκες του μαθητή, καθώς επίσης τις ιδιαίτερες ικανότητές του, δηλαδή το **μαθηματικό του προφίλ**. Ο εντοπισμός και η αξιοποίηση των δυνατών σημείων των μαθητών στον σχεδιασμό ενός προγράμματος αντιμετώπισης των δυσκολιών του στα Μαθηματικά θεωρείται μείζονος σημασίας, προκειμένου να βιώσει επιτυχία ο μαθητής και να αναπτύξει τα απαραίτητα θετικά κίνητρα για να συνεχίσει την προσπάθεια (Καραγιαννάκης, 2018). Αντιθέτως, τα προγράμματα παρέμβασης που στοχεύουν αποκλειστικά στην αντιμετώπιση του προβλήματος με τον παραδοσιακό τρόπο οδηγούν τον μαθητή σε αυξημένο άγχος, σε μειωμένο κίνητρο και σε έναν φαύλο κύκλο αποτυχιών (Ma, 1999· Maloney, Risko, Ansari, & Fugelsang, 2010), που τον αποθαρρύνουν να εμπλακεί ενεργά με το αντικείμενο (Karagiannakis & Cooreman, 2014). Έτσι, ο μαθητής συνεχίζει να εκτίθεται σε περαιτέρω αποτυχίες και το πρόβλημα απλά ανακυκλώνεται.

Επιπροσθέτως, η χρήση **αυθεντικών υλικών της καθημερινότητας** (τραπουλόχαρτα, νομίσματα, μεζούρα) που προτείνεται στους δύο τόμους του βιβλίου «**Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τον τρόπο που με βολεύει**» βοηθά τους μαθητές αφενός να αντιληφθούν με χειροπιαστό τρόπο και εντός ενός οικείου πλαισίου τις μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται, τονώνοντας το αίσθημα αυτοπεποίθησης και **καλλιεργώντας θετική στάση απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών**, και αφετέρου να αξιοποιήσουν τις γνώσεις και τις δεξιότητες αυτές στην καθημερινότητά τους, συμβάλλοντας τελικά στην τόνωση του αισθήματος της αποτελεσματικότητας σε σχέση με την εκμάθηση της προπαίδειας.

Το δίτομο βιβλίο «**Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τον τρόπο που με βολεύει**» παρουσιάζει εναλλακτικές στρατηγικές εκμάθησης των βασικών γινομένων της προπαίδειας και των αντίστοιχων πηλίκων, οι οποίες στηρίζονται στην κατανόηση και όχι σε τρικ που απλώς υπερφορτώνουν τη μνήμη και μετά από λίγο καιρό ξεχνιούνται ή μπερδεύονται μεταξύ τους. Από τις στρατηγικές αυτές κάθε μαθητής ενθαρρύνεται να επιλέξει εκείνη ή εκείνες που του ταιριάζουν, δηλαδή τον βολεύουν, ανάλογα με τις ανάγκες του ή, αλλιώς, ανάλογα με το **ατομικό μαθηματικό του προφίλ**.

Με άλλα λόγια, οι διαφοροποιημένες δραστηριότητες των βιβλίων **επιχειρούν να εκμεταλλευτούν τα δυνατά σημεία κάθε μαθητή, ώστε να αντισταθμίσουν τις δυσκολίες τους** στις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες που πραγματεύονται. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατάκτηση της προπαίδειας και των αντίστοιχων πηλίκων πολλές φορές μετατρέπεται σε συνεχή πηγή δυσκολιών για μαθητές, γονείς αλλά και εκπαιδευτικούς, καθώς αποτελεί μια βασική δεξιότητα που πρέπει να διαθέτει ένας μαθητής τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, προκειμένου να ανταποκριθεί σε μια σειρά από διαδικασίες όπως κάθετος πολλαπλασιασμός, κάθετη διαίρεση, πράξεις με κλάσματα, δυνάμεις, εξισώσεις κ.ά.

Γιάννης Καραγιαννάκης, PhD

Βιβλιογραφία

Ancker, J. S., & Kaufman, D. (2007). Rethinking health numeracy: A multidisciplinary literature review. *Journal of the American Medical Informatics Association, 14*(6), 713-721.

Baker, S., Gersten, R., & Lee, D. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students. *Elementary School Journal, 103*, 51-73.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1990). Constructivists learning and teaching. *Arithmetic Teacher*, *38*, 34-35.

Dowker, A. D. (2007). What can intervention teach us about the development of arithmetic? *Educational and Child Psychology, 24*, 64-75.

Gross, J. (2007). Supporting children with gaps in their mathematical understanding. *Educational and Child Psychology, 24*, 146-156.

Καραγιαννάκης, Γ. (2018). Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά: Γεφυρώνοντας τη θεωρία με την πράξη. Στο Φ. Βλάχος (Επιμ.), *Εγκέφαλος, Μάθηση και Ειδική Αγωγή* (σελ. 275-306). Αθήνα: Gutenberg.

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. & Roussos, P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties, 2, 115-141.*

Karagiannakis, G. & Cooreman, A. (2014). Focused intervention based on a classification MLD model. In S. Chinn (Ed.), *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties* (pp. 265-276). London: Routledge.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79,* 1202-1242.

Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 520-554.

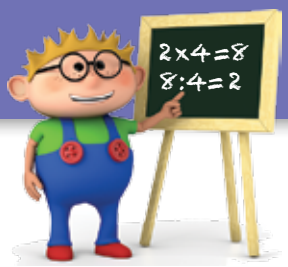
Maloney, E. A., Risko, E. F., Ansari, D., & Fugelsang, J. (2010). Mathematics anxiety affects counting but not subitizing during visual enumeration*. Cognition, 114*, 293-297.

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9789264255425-en.

Parsons, S. & Bynner, J. (2005). *Does numeracy matter more?* NRDC Research Report, Institute of Education, London 95.

Rivera-Batiz, F. L. (1992). Quantitative literacy and the likelihood of employment among young adults in the United States. *The Journal of Human Resources, 27*, 313-328.

Williams, J., Clemens, S., Oleinikova, K., & Tarvin, K. (2003). *The skills for life survey: A national needs and impact survey of literacy, numeracy and ICT skills.* DfES Research Brief 490. DfES: London.



ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Το εποπτικό υλικό που χρησιμοποιείται στο βιβλίο *Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τον τρόπο που με βολεύει* αποτελείται από (α) επανεγγράψιμες πλαστικοποιημένες καρτέλες και (β) αυθεντικά υλικά της καθημερινότητας.

Α. Επανεγγράψιμες πλαστικοποιημένες καρτέλες

Προπαίδεια (κενή καρτέλα)

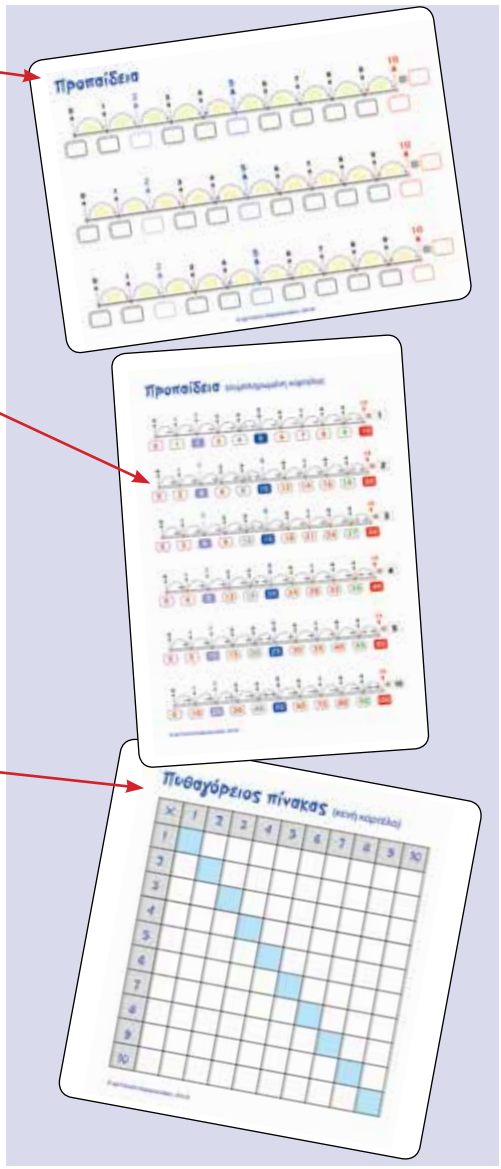
Η καρτέλα αυτή χρησιμοποιείται για την κατανόηση και την οπτικοποίηση της προπαίδειας ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, καθώς και για την εκμάθηση των γινομένων της προπαίδειας με εναλλακτικούς τρόπους.

Προπαίδεια (συμπληρωμένη καρτέλα)

Η καρτέλα συνοδεύει και επεξηγεί τον τρόπο χρήσης της επανεγγράψιμης κενής καρτέλας «Προπαίδεια». Πιο συγκεκριμένα, αναγράφει τα γινόμενα και αποκαλύπτει τη σχέση που έχουν μεταξύ τους, αλλά και τη σχέση που έχουν με τα αντίστοιχα πηλίκα. Ακόμα, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να αυτοαξιολογείται.

Πυθαγόρειος πίνακας (κενή καρτέλα)

Η καρτέλα αυτή χρησιμοποιείται για την εκμάθηση της προπαίδειας, τον γρήγορο εντοπισμό των γινομένων της, καθώς και για την αποκάλυψη των σχέσεων των γινομένων μεταξύ τους. Επιπλέον, δίνει τη δυνατότητα στον κάθε μαθητή να οριοθετεί το πλήθος των γινομένων της προπαίδειας που έχει μάθει και να μπορεί να αυτοαξιολογείται κάθε φορά μέχρι την ολοκλήρωση της εκμάθησής τους.



Πυθαγόρειος πίνακας (συμπληρωμένη καρτέλα)

Η καρτέλα αυτή συνοδεύει και επεξηγεί τον τρόπο χρήσης της επανεγγράψιμης κενής καρτέλας «Πυθαγόρειος πίνακας». Πιο συγκεκριμένα, αναγράφει τα επιμέρους γινόμενα αποκαλύπτοντας τη σχέση που έχουν μεταξύ τους, ενώ ακόμα δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να αυτοαξιολογείται.

Τετραγωνισμένο χαρτί

Η καρτέλα αυτή χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση των γινομένων της προπαίδειας, καθώς και για την αποκάλυψη των σχέσεων των γινομένων μεταξύ τους με γεωμετρικό τρόπο. Επιπλέον, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να συνδέσει την έννοια των τετράγωνων αριθμών: 1, 4, 9, 16, 25,... καθώς και του εμβαδού ορθογωνίων με τον πολλαπλασιασμό.

Πίνακες αυτοματοποίησης

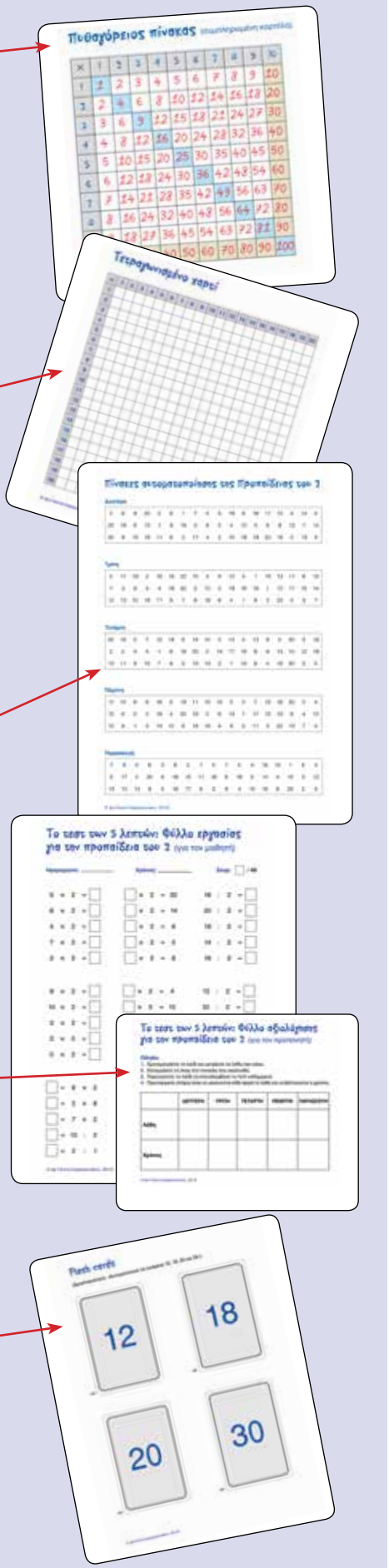
Οι καρτέλες αυτές χρησιμοποιούνται για την καθημερινή εξάσκηση στα γινόμενα ενός αριθμού και συμβάλλουν στην ενίσχυση της προσοχής και της συγκέντρωσης του μαθητή με σκοπό να ελεγχθούν τα παρορμητικά λάθη.

Το τεστ των 5 λεπτών (φύλλο εργασίας και φύλλο αξιολόγησης)

Οι καρτέλες αυτές χρησιμοποιούνται για την περιοδική αξιολόγηση του μαθητή και δίνουν τη δυνατότητα πολλών επαναλήψεων, ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λαθών και να βελτιωθεί ο χρόνος ολοκλήρωσης της δοκιμασίας.

Flash cards

Οι καρτέλες αυτές χρησιμοποιούνται για την αυτοματοποίηση των «δύσκολων» γινομένων της προπαίδειας ή αυτών που ανήκουν ταυτόχρονα στην προπαίδεια περισσότερων αριθμών.



Β. Αυθεντικά υλικά της καθημερινότητας

Νομίσματα

Τα αληθινά νομίσματα είναι ένα υλικό οικείο στα παιδιά το οποίο έχει από τη φύση του δεκαδικές υποδιαιρέσεις, τις οποίες οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν ανεπίσημα από την καθημερινότητά τους, έστω και ως διαφορά στο χρώμα. Δραστηριότητες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που γίνονται σε ρεαλιστικές συνθήκες με αληθινά νομίσματα τονώνουν την αυτοπεποίθηση των παιδιών.



Μεζούρα ραπτικής

Η μετροταινία, είτε με τη μορφή της μεζούρας ραπτικής είτε με τη μορφή της μετροταινίας του μηχανικού, είναι ένα υλικό που αρέσει στα παιδιά να το χρησιμοποιούν για να μετράνε διάφορα μήκη, όπως «οι μεγάλοι». Επιπλέον, η μετροταινία είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο για δραστηριότητες επαναλαμβανόμενης μέτρησης προς τα εμπρός και προς τα πίσω.



Τραπουλόχαρτα

Τα τραπουλόχαρτα θεωρούνται ιδανικό υλικό καθώς δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν έναν αριθμό ταυτόχρονα ως ποσότητα (αναλογική μορφή), δηλαδή ως συλλογή ομοειδών αντικειμένων, αλλά και ως αραβικό σύμβολο (συμβολική μορφή), δηλαδή ως αριθμητικό σύμβολο. Με τα τραπουλόχαρτα μπορεί κάποιος να διδάξει την έννοια του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και να οπτικοποιήσει εύκολα τα γινόμενα της προπαίδειας καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις.



Αριθμομηχανή

Η αριθμομηχανή χρησιμοποιείται όχι ως η έτοιμη λύση σε περίπτωση δυσκολίας, αλλά και ως εργαλείο σύγκρισης της ορθότητας μιας απάντησης και τελικά ως μηχανισμός αυτοελέγχου που θα κινητοποιήσει το παιδί να ψάξει να βρει πού και γιατί έκανε λάθος.





ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Το εποπτικό υλικό που χρησιμοποιείται στο βιβλίο *Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με τον τρόπο που με βολεύει* αποτελείται από (α) επανεγγράψιμες πλαστικοποιημένες καρτέλες και (β) αυθεντικά υλικά της καθημερινότητας.

Α. Επανεγγράψιμες πλαστικοποιημένες καρτέλες

Προπαίδεια (κενή καρτέλα)

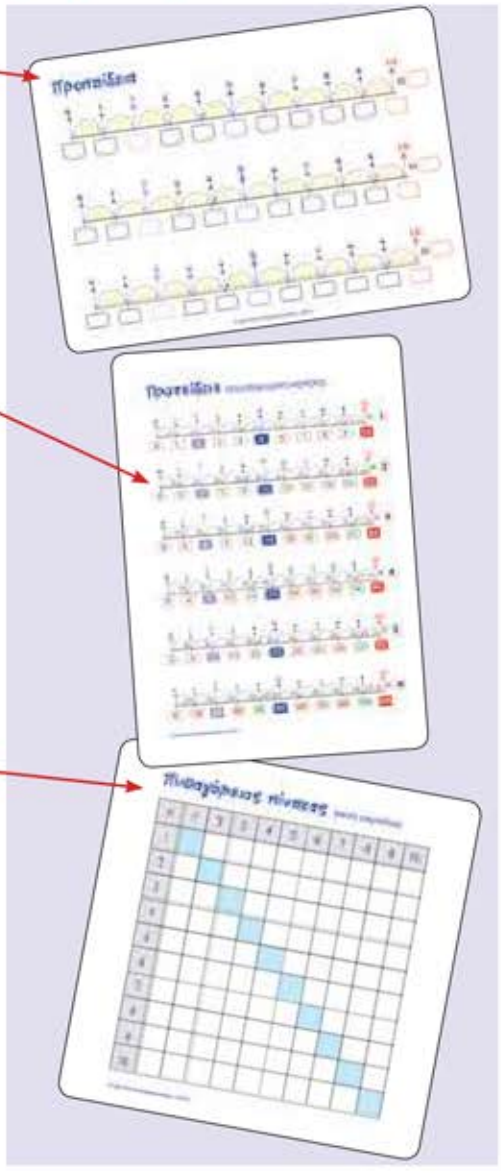
Η καρτέλα αυτή χρησιμοποιείται για την κατανόηση και την οπτικοποίηση της προπαίδειας ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης, καθώς και για την εκμάθηση των γινομένων της προπαίδειας με εναλλακτικούς τρόπους.

Προπαίδεια (συμπληρωμένη καρτέλα)

Η καρτέλα συνοδεύει και επεξηγεί τον τρόπο χρήσης της επανεγγράψιμης κενής καρτέλας «Προπαίδεια». Πιο συγκεκριμένα, αναγράφει τα γινόμενα και αποκαλύπτει τη σχέση που έχουν μεταξύ τους, αλλά και τη σχέση που έχουν με τα αντίστοιχα πηλίκα. Ακόμα, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να αυτοαξιολογείται.

Πυθαγόρειος πίνακας (κενή καρτέλα)

Η καρτέλα αυτή χρησιμοποιείται για την εκμάθηση της προπαίδειας, τον γρήγορο εντοπισμό των γινομένων της, καθώς και για την αποκάλυψη των σχέσεων των γινομένων μεταξύ τους. Επιπλέον, δίνει τη δυνατότητα στον κάθε μαθητή να οριοθετεί το πλήθος των γινομένων της προπαίδειας που έχει μάθει και να μπορεί να αυτοαξιολογείται κάθε φορά μέχρι την ολοκλήρωση της εκμάθησής τους.



Πυθαγόρειος πίνακας (συμπληρωμένη καρτέλα)

Η καρτέλα αυτή συνοδεύει και επεξηγεί τον τρόπο χρήσης της επανεγγράψιμης κενής καρτέλας «Πυθαγόρειος πίνακας». Πιο συγκεκριμένα, αναγράφει τα επιμέρους γινόμενα αποκαλύπτοντας τη σχέση που έχουν μεταξύ τους, ενώ ακόμα δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να αυτοαξιολογείται.

Τετραγωνισμένο χαρτί

Η καρτέλα αυτή χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση των γινομένων της προπαίδειας, καθώς και για την αποκάλυψη των σχέσεων των γινομένων μεταξύ τους με γεωμετρικό τρόπο. Επιπλέον, δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να συνδέσει την έννοια των τετράγωνων αριθμών: 1, 4, 9, 16, 25,... καθώς και του εμβαδού ορθογωνίων με τον πολλαπλασιασμό.

Πίνακες αυτοματοποίησης

Οι καρτέλες αυτές χρησιμοποιούνται για την καθημερινή εξάσκηση στα γινόμενα ενός αριθμού και συμβάλλουν στην ενίσχυση της προσοχής και της συγκέντρωσης του μαθητή με σκοπό να ελεγχθούν τα παρορμητικά λάθη.

Το τεστ των 5 λεπτών (φύλλο εργασίας και φύλλο αξιολόγησης)

Οι καρτέλες αυτές χρησιμοποιούνται για την περιοδική αξιολόγηση του μαθητή και δίνουν τη δυνατότητα πολλών επαναλήψεων, ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λαθών και να βελτιωθεί ο χρόνος ολοκλήρωσης της δοκιμασίας.

Flash cards

Οι καρτέλες αυτές χρησιμοποιούνται για την αυτοματοποίηση των «δύσκολων» γινομένων της προπαίδειας ή αυτών που ανήκουν ταυτόχρονα στην προπαίδεια περισσότερων αριθμών.



Β. Αυθεντικά υλικά της καθημερινότητας

Νομίσματα

Τα αληθινά νομίσματα είναι ένα υλικό οικείο στα παιδιά το οποίο έχει από τη φύση του δεκαδικές υποδιαιρέσεις, τις οποίες οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν ανεπίσημα από την καθημερινότητά τους, έστω και ως διαφορά στο χρώμα. Δραστηριότητες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης που γίνονται σε ρεαλιστικές συνθήκες με αληθινά νομίσματα τονώνουν την αυτοπεποίθηση των παιδιών.



Μεζούρα ραπτικής

Η μετροταινία, είτε με τη μορφή της μεζούρας ραπτικής είτε με τη μορφή της μετροταινίας του μηχανικού, είναι ένα υλικό που αρέσει στα παιδιά να το χρησιμοποιούν για να μετράνε διάφορα μήκη, όπως «οι μεγάλοι». Επιπλέον, η μετροταινία είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο για δραστηριότητες επαναλαμβανόμενης μέτρησης προς τα εμπρός και προς τα πίσω.



Τραπουλόχαρτα

Τα τραπουλόχαρτα θεωρούνται ιδανικό υλικό καθώς δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν έναν αριθμό ταυτόχρονα ως ποσότητα (αναλογική μορφή), δηλαδή ως συλλογή ομοειδών αντικειμένων, αλλά και ως αραβικό σύμβολο (συμβολική μορφή), δηλαδή ως αριθμητικό σύμβολο. Με τα τραπουλόχαρτα μπορεί κάποιος να διδάξει την έννοια του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και να οπτικοποιήσει εύκολα τα γινόμενα της προπαίδειας καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις.



Αριθμομηχανή

Η αριθμομηχανή χρησιμοποιείται όχι ως η έτοιμη λύση σε περίπτωση δυσκολίας, αλλά και ως εργαλείο σύγκρισης της ορθότητας μιας απάντησης και τελικά ως μηχανισμός αυτοελέγχου που θα κινητοποιήσει το παιδί να ψάξει να βρει πού και γιατί έκανε λάθος.





Η προπαίδεια του 1

Ενότητα 1η



Εισαγωγή στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση

Δραστηριότητα 1: Στρώνουμε το τραπέζι για πολλούς καλεσμένους!

Οδηγίες:

Παρατήρησε την εικόνα και απάντησε προφορικά στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Πόσα άτομα θα έρθουν για φαγητό;
- Πόσες φορές θα βάλεις από 1 πιάτο;
- Πόσες φορές θα βάλεις από 1 ποτήρι;
- Πόσες φορές θα βάλεις από 1 μαχαίρι;
- Πόσες φορές θα φέρεις από 1 καρέκλα, για να καθίσουν όλοι;

×

φορές, πολλαπλασιάζω, πολλαπλασιασμός, επί



Δραστηριότητα 2: Μοιράζουμε μπαλόνια!

Οδηγίες:

1. Μέτρησε τα μπαλόνια της εικόνας. Πόσα είναι;
2. Αν δώσεις σε κάθε παιδί από 1 μπαλόνι, για πόσα παιδιά θα φτάσουν τα μπαλόνια;

:

μοιράζω, ομαδοποιώ, χωράει, διαιρώ, διαίρεση, διά



Δραστηριότητα 3: Αισθητοποιώ τα σύμβολα του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης

Υλικό: πλαστελίνη, 2 κάρτες από άσπρο χαρτόνι

Οδηγίες:



1. Φτιάξε το × και το : με πλαστελίνη.
2. Αντίγραψε κάθε σύμβολο σε μία κάρτα.
3. Σκέψου ποιο σύμβολο ταιριάζει με καθεμία από τις εικόνες των προηγούμενων δραστηριοτήτων.
4. Βάλε δίπλα την αντίστοιχη κάρτα.
5. Σκέψου και άλλα παραδείγματα από την καθημερινότητά σου και διάλεξε το αντίστοιχο σύμβολο.
6. Συζήτησέ τα με τον διπλανό σου.



Ενότητα 2η: Πολλαπλασιασμός με το 1

Δραστηριότητα 4: Ανακαλύπτω την προπαίδεια του 1 με υλικά της καθημερινότητας

Υλικό: φρούτα, μολύβια, μπαλόνια, ξυλάκια

Οδηγίες:

1. Παρατήρησε τα παραδείγματα της εικόνας.



2. Διάλεξε από τον πίνακα το γινόμενο που ταιριάζει σε καθένα από τα παραπάνω παραδείγματα.

1 × 1	7 × 1	6 × 1	5 × 1	8 × 1
4 × 1	2 × 1	10 × 1	9 × 1	3 × 1
4 μπουκάλια				

3. Για παράδειγμα, το γινόμενο 4 × 1 (4 φορές το 1 πράγμα ή 4 επί 1) ταιριάζει με τα μπουκάλια, γιατί έχω πάρει 4 φορές από 1 μπουκάλι.
4. Γράψε κάτω από το γινόμενο 4 × 1 «4 μπουκάλια». Εναλλακτικά, μπορείς να τα ζωγραφίσεις!
5. Συνέχισε με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.
6. Μπορείς να αναπαραστήσεις τα γινόμενα και με χειροπιαστά υλικά που θα μαζέψεις, όπως φρούτα, μολύβια, μπαλόνια, ξυλάκια κ.ά.