

Περιεχόμενα

Περιγραφή	9
Πρόλογος	13
Εισαγωγή από τον Prof. Steve Chinn	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ & ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	25
1.1 Τρόποι αναπαράστασης ενός αριθμού	25
1.2 Κατανόηση των σχέσεων μεταξύ Μονάδων-Δεκάδων-Εκατοντάδων (Μ-Δ-Ε)	26
1.2.1 Η αρχή της ανταλλαγής	26
1.2.2 Ανάλυση αριθμού (Μ-Δ-Ε) – Εντοπισμός του αριθμού σε αριθμογραμμή	28
1.2.3 Θεσιακή αξία	29
1.2.4 Ο ιδιαίτερος ρόλος του μηδενός (0)	30
1.3 Αναπαράσταση των πρώτων 100 αριθμών με από υλικό	32
1.4 Δομή του ακέραιου μέρους του Δεκαδικού Συστήματος	33
1.5 Ανάγνωση πολυψήφιων αριθμών	33
1.6 Δεκαδικοί αριθμοί	34
1.6.1 Αναπαράσταση – σύγκριση δεκαδικών αριθμών	35
1.6.2 Ανάγνωση και γραφή δεκαδικών αριθμών	38
1.7 Εικόνα Δεκαδικού Συστήματος	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ	41
2.1 Μέτρηση προς τα εμπρός	41
2.2 Συνδυασμοί των αριθμών 2 έως 9	43
2.3 Ζευγάρια του 10	45
2.4 Προσθέτω τους δίδυμους αριθμούς και βρίσκω τους διπλούς	47
2.5 Πρόσθεση σχεδόν δίδυμων αριθμών	49
2.6 Πρόσθεση μονοψήφιου σε στρογγυλή Δεκάδα	50
2.7 Το 9 είναι 10 παρά 1	51
2.8 Πρόσθεση στρογγυλών Δεκάδων σε αριθμό	51
2.9 Γεφύρωση προς τα εμπρός	53
2.10 Νοερή πρόσθεση με ανάλυση σε Μονάδες	55
2.11 Κάθετη πρόσθεση μεταξύ ακέραιων και δεκαδικών αριθμών	58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ	63
3.1 Μέτρηση προς τα πίσω	63
3.2 Βγάζω τον έναν σύνδεσμο	65
3.3 Βγάζω το ένα ζευγαράκι του 10	67
3.4 Αφαίρεση μονοψήφιου από στρογγυλή Δεκάδα	68
3.5 Βγάζω από τους διπλούς αριθμούς τον έναν δίδυμο	69
3.6 Αφαίρεση στρογγυλών Δεκάδων από αριθμό	70
3.7 Το 9 είναι 10 παρά 1	71

3.8	Γεφύρωση προς τα πίσω	72
3.9	Εύρεση της διαφοράς	74
3.10	Γεφύρωση προς τον μεγαλύτερο (μειωτέο)	75
3.11	Νοερή αφαίρεση με ανάλυση σε Μονάδες	76
3.12	Κάθετη αφαίρεση μεταξύ ακέραιων και δεκαδικών αριθμών	79
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ		85
4.1	Ο πολλαπλασιασμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση	85
4.2	Η προπαίδεια ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση	86
4.3	Ολιστικός τρόπος εκμάθησης των γινομένων μεταξύ των αριθμών 0 έως 10	88
4.4	Πολλαπλασιασμός με δυνάμεις του 10	95
4.5	Πολλαπλασιασμός σε πίνακα	96
4.6	Πολλαπλασιασμός με επιμερισμό σε Μ-Δ-Ε (οπτικά, οριζόντια και κάθετα)	98
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ		105
5.1	Η διαίρεση ως ομαδοποίηση («χωράει»)	105
5.2	Η διαίρεση ως διανομή («μοιράζω»)	108
5.3	Διαίρεση με επιμερισμό (νοερά και οριζόντια)	111
5.4	Διαίρεση με δυνάμεις του 10	113
5.5	Κάθετη διαίρεση	114
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ		125
6.1	Τρόποι προσέγγισης των κλασμάτων	125
6.1.1	Τα κλάσματα ως μέρος όλου	126
6.1.2	Τα κλάσματα ως διαίρεση	130
6.2	Βασικές έννοιες για την κατανόηση των κλασμάτων	132
6.3	Σύγκριση κλασμάτων	135
6.4	Πράξεις με κλάσματα	138
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ		145
Επίλογος από την Anny Cooreman		159

Σημείωμα του συγγραφέα

Η συνεργασία μου με μαθητές λυκείου που αντιμετώπιζαν γενικές αλλά και ειδικές μαθησιακές δυσκολίες με οδήγησε στο συμπέρασμα ότι τα προβλήματα που σχετίζονται με τα Μαθηματικά στην ηλικία αυτή είναι μόνο η κορυφή του παγόβουνου. Αυτό, λοιπόν, που έπρεπε να κάνω ήταν να διεισδύσω στο πρόβλημα, προκειμένου να εντοπίσω την απαρχή των δυσκολιών αυτών. Προσανατολίστηκα αρχικά στο γυμνάσιο αλλά γρήγορα συνειδητοποίησα ότι έπρεπε να ξεκινήσω από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, εκεί όπου θεμελιώνονται οι μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες – εκεί όπου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τα πρώιμα Μαθηματικά. Τότε, ανάλογα με τον τρόπο διδασκαλίας, οι μαθητές είτε ακολουθούν παθητικά συγκεκριμένες οδηγίες, απομνημονεύοντας κανόνες χωρίς να τους κατανοούν, είτε συμμετέχουν ενεργά θέτοντας ερωτήματα και επιχειρήματα. Πλέον, είμαι πεπεισμένος ότι οι δυσκολίες στα Μαθηματικά πρέπει να αντιμετωπίζονται μεθοδικά και στοχευμένα με αφετηρία τις θεμελιώδεις έννοιες που δεν έχουν κατακτηθεί στο δημοτικό, ανεξάρτητα από την ηλικία του κάθε μαθητή. Έτσι, εντοπίζοντας τις ελλείψεις του κάθε μαθητή από το αρχικό αυτό στάδιο προωθούμε την ουσία των Μαθηματικών στηριζόμενοι στις υπάρχουσες γνώσεις του. Άλλωστε, όσο πιο νωρίς ο μαθητής έρθει σε επαφή με αυτή την προσέγγιση των Μαθηματικών, τόσο πιο νωρίς θα ελευθερώσει τη σκέψη του.

Η δημιουργία του προγράμματος **«Οι αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες»** προέρχεται πρώτα απ' όλα από την ανάγκη μου ως ενεργού δασκάλου ενηλίκων και ανηλίκων να κατανοούν την ουσία όσων διδάσκω. Μετά την ολοκλήρωση της εφαρμογής του παρόντος προγράμματος, προκύπτει η ανάγκη δημιουργίας αντίστοιχου προγράμματος για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, γεγονός που έχει ήδη δρομολογηθεί.

«Πες μου και θα το ξεχάσω, δείξε μου και θα το θυμηθώ,
κάνε με να συμμετάσχω και θα το καταλάβω.»

Κινέζικη παροιμία

Πρόλογος

Τρόποι αναπαράστασης και επεξεργασίας των αριθμών

Η πλειονότητα των ανθρώπων έχει την αίσθηση πως οι αριθμοί αναπαριστώνται σχεδόν αποκλειστικά με τα αντίστοιχα αραβικά τους σύμβολα (1, 2, 3, ...). Ωστόσο αυτό αποτελεί έναν μόνο από τους τρόπους προσέγγισής τους, καθώς αναπαριστούμε και επεξεργαζόμαστε τους αριθμούς ως αραβικά σύμβολα, ως αριθμολέξεις και ως ποσότητες (Dehaene, 1992).

Για παράδειγμα, μπορούμε να αναφερθούμε στον αριθμό «3» με τους παρακάτω τρόπους:

(α) με **αραβικό σύμβολο**, δηλαδή 3·

(β) με **λεκτική μορφή**, δηλαδή τρία·

(γ) με **αναλογική ή ποσοτική μορφή**, δηλαδή .

α. Τα αραβικά σύμβολα μεταξύ άλλων χρησιμοποιούνται για την επίλυση μιας εξίσωσης ή για τη διεξαγωγή νοερών υπολογισμών για διψήφιους και πολυψήφιους αριθμούς. Για παράδειγμα, όταν κάποιος επιθυμεί να προσθέσει νοερά «τριάντα πέντε και δώδεκα», μετατρέπει νοητικά τους αριθμούς από τη λεκτική στην αντίστοιχη αραβική μορφή τους (35 και 12) και προχωρά στη δρομολόγηση της διαδικασίας επίλυσης της πράξης.

β. Η λεκτική μορφή των αριθμών αξιοποιείται σε μαθηματικές δεξιότητες όπως η μέτρηση, η εφαρμογή μαθηματικών κανόνων και η εκμάθηση βασικών αριθμητικών γεγονότων (π.χ. προπαίδεια). Για παράδειγμα, όταν κάποιος επιθυμεί να υπολογίσει «τρεις φορές το πέντε», ανακαλεί από τη μνήμη του την αριθμολέξη «δεκαπέντε».

γ. Τέλος, η μορφή του αριθμού ως ποσότητας άπτεται άμεσα δραστηριοτήτων όπως η εύρεση της θέσης ενός αριθμού πάνω στην αριθμογραμμή, η άμεση εκτίμηση μικρών ποσοτήτων (1 έως 4 αντικείμενα), η εκτίμηση κατά προσέγγιση μεγαλύτερων ποσοτήτων ή η σύγκρισή τους. Για παράδειγμα, ένας δάσκαλος όταν βλέπει 3 μαθητές αναγνωρίζει αυτόματα το πλήθος τους χωρίς να χρειάζεται να τους μετρήσει (άμεση εκτίμηση), εκτιμά –μπαίνοντας σε μια συνηθισμένη τάξη– ότι υπάρχουν κατά προσέγγιση 20-25 μαθητές (εκτίμηση κατά προσέγγιση), ή παρατηρεί κατά την πρωινή προσευχή ότι οι μαθητές της Α΄ τάξης είναι περισσότεροι από αυτούς της Β΄ τάξης (διαισθητική σύγκριση).

Γίνεται φανερό, λοιπόν, πως η επιτυχία ενός μαθητή στο γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών έγκειται αφενός στην ικανότητα επεξεργασίας των αριθμών με καθέναν από τους τρεις προαναφερθέντες τρόπους και αφετέρου στην ικανότητα μετάβασης από τη μια μορφή στην άλλη, ανάλογα με τη φύση της εκάστοτε δραστηριότητας. Το βιβλίο «**Οι αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες**», σε συνδυασμό με το ομώνυμο εποπτικό υλικό, περιέχει πλήθος δραστηριοτήτων ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν, να εμπεδώσουν και να εξασκηθούν στις τρεις μορφές αναπαράστασης των αριθμών και στη μετατροπή αυτών από τη μια μορφή στην άλλη.

Απαιτήσεις του μαθήματος των Μαθηματικών

Ο όρος «μαθηματικά» προέρχεται από την ελληνική λέξη «μαθαίνω». Εξαρχής λοιπόν τα Μαθηματικά αναφέρονται σε ένα διευρυμένο πεδίο γνώσεων διαιρούμενο σε διαφορετικούς τομείς, όπως αριθμητική, γεωμετρία, άλγεβρα, ανάλυση, στατιστική, πιθανότητες κ.ά. Η απόκτηση μαθηματικών δεξιοτήτων σε

όλους αυτούς τους τομείς προϋποθέτει αντίστοιχα διευρυμένες γνωστικές ικανότητες. Πιο συγκεκριμένα, απαραίτητες κρίνονται οι λεκτικές δεξιότητες (για την επεξεργασία των αριθμολέξεων, την αποκωδικοποίηση της μαθηματικής ορολογίας, την ανάγνωση και την κατανόηση λεκτικών προβλημάτων ή εκφωνήσεων των ασκήσεων), η μνήμη (για την απομνημόνευση βασικών αριθμητικών δεδομένων, διαδικασιών, κανόνων, τύπων, συμβόλων), η χωροχρονική αντίληψη, η μαθηματική λογική, η αφαιρετική ικανότητα καθώς και η μεταγνωστική ικανότητα (δηλαδή η αποτελεσματική διαχείριση και ο έλεγχος των γνώσεων που έχουν αποκτηθεί).

Η προσέγγιση που προτείνουν οι **«Αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες»** στοχεύει στην ανάπτυξη και καλλιέργεια των παραπάνω προαπαιτούμενων δεξιοτήτων με δομημένο τρόπο. Στις δραστηριότητες που περιέχονται σε αυτό το βιβλίο:

- Οπτικοποιούνται οι ποσότητες με τη χρήση χειροπιαστών υλικών.
- Παρουσιάζονται οι μαθηματικές διαδικασίες κιναισθητικά με τη χρήση υλικών της καθημερινότητας.
- Ερμηνεύονται οι αριθμολέξεις και η μαθηματική ορολογία, συνδέονται οι γνώσεις και τα νοήματα.
- Χρησιμοποιούνται εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισης των μαθηματικών συμβόλων.
- Αποκαλύπτεται η λογική των διαδικασιών και παρουσιάζονται μνημοτεχνικές για την εφαρμογή τους.
- Παρέχεται πληθώρα αντισταθμιστικών στρατηγικών αντιμετώπισης των μνημονικών δυσκολιών.
- Καλλιεργείται η λογικομαθηματική έννοια της συνεπαγωγής (αν – τότε).
- Καλλιεργείται ο αυτοέλεγχος.

Εν κατακλείδι, γίνεται προσπάθεια διερεύνησης των αριθμών, των εννοιών και των διαδικασιών **...πέρα απ' τους κανόνες**.

Δυσκολίες στα Μαθηματικά

Οι δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίζει ένας μαθητής τυπικής ανάπτυξης στο γνωστικό αντικείμενο των Μαθηματικών οφείλονται σε πλήθος παραγόντων. Οι εγγενείς δυσκολίες και οι απαιτήσεις που πηγάζουν από τη φύση του ίδιου του μαθήματος και οι συσσωρευμένες αποτυχίες από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού προκαλούν συχνά άγχος για τα Μαθηματικά (τη λεγόμενη μαθηματικοφοβία). Επιπλέον, η ανεπαρκής διδασκαλία του γνωστικού αντικειμένου, ο παραδοσιακός τρόπος προσέγγισης που στοχεύει περισσότερο στη μετάδοση πληροφοριών και μηχανιστικών διαδικασιών και λιγότερο στην κατανόηση και στην απτή εφαρμογή, καθώς και οι αναχρονιστικές αντιλήψεις σχετικά με τα Μαθηματικά (π.χ. τα αγόρια έχουν έμφυτη προδιάθεση για καλύτερη επίδοση στα Μαθηματικά) αποτελούν παράγοντες επιπρόσθετων δυσκολιών. Επίσης, ενδεχόμενη ελλιπής φοίτηση των μαθητών μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη στην κατανόηση των Μαθηματικών, δεδομένης της ιεραρχικής τους δομής.

Τέλος, μετά τον αποκλεισμό όλων των παραπάνω, οι δυσκολίες του μαθητή ενδέχεται να οφείλονται σε Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά.

Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά – Δυσαριθμησία

Ο όρος Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά (ΜΔΜ) έχει κατά καιρούς θεωρηθεί συνώνυμος με τον όρο Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία, αλλά και διακριτός, όταν χρησιμοποιείται και για αναφορά στη μεγαλύτερη κατηγορία των δυσκολιών στα Μαθηματικά. Σε αυτήν την περίπτωση, η πρόθεση είναι να περιγράψει κανείς το 20% του γενικού πληθυσμού που διαθέτει ανεπαρκείς αριθμητικές δεξιότητες (EACEA, 2011) χωρίς κατ' ανάγκη να παρουσιάζει τη σοβαρή μαθησιακή δυσκολία που περιλαμβάνεται στον όρο Δυσαριθμησία, η οποία εκτιμάται πως επηρεάζει το 5%-8% του πληθυσμού (Lewis & Fisher, 2016). Πρόσφατα, οι Szűcs και Goswami (2013) όρισαν την Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία ως μια σταθερά χαμηλή μαθηματική επίδοση αναπτυξιακής προέλευσης, η οποία σχετίζεται με κάποιο ή κάποια είδη γνωστικής λειτουργίας ή/και αναπαράστασης. Η διαταραχή εμφανίζεται όταν συνυπάρχει κίνητρο για τη μελέτη των Μαθηματικών και τυπική πρόσβαση στην κατάλληλη μαθηματική εκπαίδευση. Η έρευνα προτείνει ότι τα περισσότερα άτομα που είναι αδύναμα στα Μαθηματικά δεν παρουσιάζουν Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία.

Οι μαθητές με ΜΔΜ εμφανίζουν σε γενικές γραμμές χαμηλή επίδοση στο μάθημα των Μαθηματικών του σχολείου (ενώ μπορεί να παρατηρείται καλή βαθμολογία στα άλλα σχολικά μαθήματα), καθώς και δυσκολία χειρισμού των αριθμών σε καθημερινές περιστάσεις, όπως στα ψώνια, στο να λένε την ώρα ή να θυμούνται αριθμούς τηλεφώνων. Τα συνήθη βασικά συμπτώματα που παρουσιάζουν οι μαθητές αυτοί στο μάθημα των Μαθηματικών είναι: η αδυναμία κατανόησης βασικών αριθμητικών εννοιών (π.χ. η επίγνωση του αριθμού, η έννοια της αριθμότητας), οι δυσκολίες πρόσκτησης των αρχών της μέτρησης, οι δυσκολίες ανάκλησης βασικών αριθμητικών γεγονότων (π.χ. προπαίδεια), οι δυσκολίες εκτέλεσης νοερών ή/και γραπτών υπολογισμών, η ανακριβής τοποθέτηση αριθμών στην αριθμογραμμή, οι δυσκολίες διάκρισης των αραβικών και των πραξιακών συμβόλων, οι δυσκολίες επεξεργασίας γεωμετρικών σχημάτων, οι δυσκολίες επίλυσης προβλημάτων. Ωστόσο ούτε ένα από τα παραπάνω βασικά συμπτώματα δεν έχει βρεθεί κατ' εξακολούθηση σε παιδιά με ΜΔΜ, στοιχείο που υπογραμμίζει την ανομοιογένεια των συμπτωμάτων που εμφανίζουν οι εν λόγω μαθητές (Fias, Menon & Szűcs, 2013).

Λόγω της ανομοιογένειας των συμπτωμάτων των ατόμων που παρουσιάζουν μη τυπική ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, οι ΜΔΜ έχουν λάβει ποικίλες κατηγοριοποιήσεις στο πέρασμα των χρόνων. Έναν βασικό παράγοντα για τον οποίο οι υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις ΜΔΜ δεν είναι αρκετά ικανοποιητικές αποτελεί το γεγονός πως τα προφίλ των παιδιών που συναντώνται στην πράξη δεν ανήκουν σε κάποιον υποτύπο, αλλά διακρίνονται από διάφορα χαρακτηριστικά που ανήκουν σε διαφορετικούς υποτύπους (Desoete, 2007). Παρ' όλη λοιπόν την πρόοδο που έχει σημειωθεί στον τομέα των ΜΔΜ από τη γνωστική ψυχολογία, γίνεται προφανής η δυσκολία εφαρμογής των αδιαμφισβήτητων σημαντικών αυτών ευρημάτων στη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών. Ακόμα και αν ο εκπαιδευτικός των Μαθηματικών θέλει να αξιοποιήσει τα αποτελέσματα μιας ψυχομετρικής κλινικής διάγνωσης (εφόσον είναι σε θέση να τη διαβάσει), είναι εξαιρετικά δύσκολο να ερμηνεύσει τα αντίστοιχα ευρήματα και να υποθέσει τις επιπτώσεις που θα έχουν στην ανάπτυξη συγκεκριμένων μαθηματικών δεξιοτήτων και κατ' επέκταση σε συγκεκριμένες δραστηριότητες στα Μαθηματικά.

Η ανάγκη αντιμετώπισης του παραπάνω φαινομένου μάς οδήγησε στην ανάπτυξη ενός μοντέλου κατηγοριοποίησης των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων με κριτήριο τις απαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες (ειδικές, που έχουν να κάνουν με την αναπαράσταση και την επεξεργασία του αριθμού ή του γενικού γνωστικού τομέα) στις οποίες φαίνονται να εδράζονται. Το μοντέλο αυτό απαρτίζεται από τους τομείς: (1) επίγνωσης αριθμού, (2) μνήμης (ανάκλησης και επεξεργασίας), (3) συλλογιστικής και (4) οπτικο-χωρικό, οι οποίοι περιγράφονται παρακάτω.

- **Επίγνωσης αριθμού.** Ο υποτύπος αυτός εκδηλώνεται με δυσκολίες στη διαισθητική αντίληψη των αριθμών ως ποσότητας (αίσθηση αριθμού), στη σύγκριση ποσοτήτων κατά προσέγγιση, στην κατανόηση και διαχείριση των αραβικών συμβόλων, στην κατανόηση των αρχών της μέτρησης, στην κατανόηση των τεσσάρων βασικών πράξεων και των αντίστοιχων πραξιακών συμβόλων.
- **Μνήμης.** Ο υποτύπος αυτός εκδηλώνεται με δυσκολίες στην ανάκληση βασικών αριθμητικών γεγονότων (π.χ. προπαίδεια), στην εκτέλεση απλών νοερών υπολογισμών, στην ανάκληση της σημασίας της μαθηματικής ορολογίας (αριθμητής, παρονομαστής, διαιρέτης, διαιρετέος, άθροισμα, γινόμενο, υποτείνουσα, διακρίνουσα), στη διατήρηση στη μνήμη των δεδομένων και των ζητούμενων λεκτικών προβλημάτων, στην αποκωδικοποίηση λεκτικών μαθηματικών οδηγιών, στην απομνημόνευση λεκτικών μαθηματικών κανόνων και μαθηματικών τύπων.
- **Συλλογιστικής.** Ο υποτύπος αυτός εκδηλώνεται με δυσκολίες στην αντίληψη της μαθηματικής λογικής, με αντιπροσωπευτικότερο παράδειγμα τη λογική έννοια της συνεπαγωγής (αν ένας ισχυρισμός Α αληθεύει, τότε συνεπάγεται την αλήθεια ενός ισχυρισμού Β), δυσκολίες στην επιλογή της κατάλληλης πράξης για την επίλυση ενός προβλήματος, στην εύρεση αριθμητικών μοτίβων, στην αντίληψη αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, στην κατανόηση των βημάτων των μαθηματικών διαδικασιών, στην εφαρμογή μαθηματικών αλγόριθμων.
- **Οπτικο-χωρικός.** Ο υποτύπος αυτός εκδηλώνεται με δυσκολίες στην επεξεργασία γεωμετρικών σχημάτων (αριθμογραμμές, δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα) και γραφικών παραστάσεων, στη διάκριση συμβόλων που μοιάζουν μεταξύ τους, στην αντίληψη του μεγέθους και στον προσανατολισμό.

Πρόκειται για ένα *a priori* θεωρητικό μοντέλο που διατυπώθηκε το 2014 από τους Καραγιαννάκη, Baccaglini-Frank και Παπαδάτο, το οποίο προσεγγίζει με ολιστικό τρόπο τα μοντέλα επεξεργασίας και αναπαράστασης των αριθμών, καθώς και τις υποθέσεις προέλευσης και τους υποτύπους των ΜΔΜ μετά από ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας. Η εγκυρότητα και αξιοπιστία του συνθετικού αυτού μοντέλου φαίνεται να επιβεβαιώνεται από τα μέχρι στιγμής ευρήματα εμπειρικών μελετών που έχουν διεξαχθεί (Καραγιαννάκης, 2014· Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014· Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Roussos, 2017) καθώς και άλλων που είναι σε εξέλιξη.

Ο βασικός σκοπός της ανάπτυξης του τετραπλού αυτού μοντέλου κατηγοριοποίησης των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων είναι η παροχή ενός εργαλείου καταγραφής των δυνατών και των αδύναμων μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών μέσα από τη σύνδεσή τους με τις αντίστοιχες γνωστικές δεξιότητες που απαιτούνται. Έτσι, αντί να διερευνώνται μεμονωμένα οι ελλειμματικές μαθηματικές δεξιότητες, που φαίνεται πως συνδέονται με κάποιο συγκεκριμένο νευρο-γνωστικό έλλειμμα (π.χ. Αναπτυξιακή Δυσαριθμησία, Δυσλεξία, ΔΕΠ(-Υ), αυτιστικό φάσμα κ.ά.) με το οποίο μπορεί να έχει διαγνωστεί ένας μαθητής, επιχειρείται μια διευρυμένη διερεύνηση των μαθηματικών δεξιοτήτων και γνώσεων με σκοπό τη σκιαγράφηση του γνωστικού προφίλ κάθε μαθητή στα Μαθηματικά. Με τον τρόπο αυτόν το γνωστικό προφίλ στα Μαθηματικά βασίζεται στις μαθηματικές δεξιότητες ανεξάρτητα από το είδος της μαθησιακής δυσκολίας ή των μαθησιακών δυσκολιών του κάθε μαθητή.

Το τετραπλό μοντέλο κατηγοριοποίησης των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων πρακτικά επιτρέπει στον ειδικό και τον εκπαιδευτικό τη σκιαγράφηση εξατομικευμένων προφίλ στα Μαθηματικά καταγράφοντας τόσο τα δυνατά όσο και τα αδύναμα σημεία των μαθητών στα Μαθηματικά (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014). Μπορεί έτσι να αποτελέσει τη βάση για τον σχεδιασμό αποτελεσματικών στρατηγικών αντιμετώπισης των δυσκολιών στα Μαθηματικά τόσο σε εξατομικευμένο όσο και σε ομαδικό επίπεδο. Ο εντοπισμός των δυνατών σημείων των μαθητών στα Μαθηματικά είναι μείζονος σημασίας, αφού η **αντιμετώπιση των δυσκολιών στα Μαθηματικά** θα πρέπει να επικεντρώνεται σε τρόπους διδασκαλίας που εστιάζουν στα δυνατά σημεία κάθε μαθητή, ώστε να αντισταθμίσουν τις αδύναμες μαθηματικές τους δεξιότητες. Μόνο έτσι θα βιώσει επιτυχία ο μαθητής εξασφαλίζοντας τα απαραίτητα θετικά κίνητρα για να συνεχίσει την προσπάθεια. Αντιθέτως, η διδασκαλία και τα προγράμματα παρέμβασης τα οποία στοχεύουν αποκλειστικά στην αντιμετώπιση των αδυναμιών του μαθητή συμβάλλουν στην ανακάλυψη του προβλήματος, με αποτέλεσμα ο μαθητής να συνεχίζει να εκτίθεται σε περαιτέρω αποτυχίες, οι οποίες αυξάνουν το άγχος και αποτελούν αντικίνητρο ενεργής εμπλοκής του μαθητή με το αντικείμενο (Karagiannakis & Cooreman, 2014).

Οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται στο βιβλίο **«Οι αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες»** παρουσιάζουν στρατηγικές αντιμετώπισης για καθέναν από τους παραπάνω τομείς του τετραπλού μοντέλου κατηγοριοποίησης των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων. Έτσι, μπορούν να εστιάσουν στοχευμένα στις δυσκολίες κάθε μαθητή, ο οποίος καλείται να χρησιμοποιήσει και να δράσει πάνω στο εποπτικό υλικό «Οι αριθμοί ...πέρα απ' τους κανόνες», ακολουθώντας τις αντίστοιχες οδηγίες χρήσης του ομώνυμου βιβλίου. **Άλλωστε, μαθαίνω Μαθηματικά σημαίνει κάνω Μαθηματικά.**

Σε ποιους απευθύνεται

Το πρόγραμμα «Οι αριθμοί πέρα ...απ' τους κανόνες» απευθύνεται σε:

- Μαθητές που έχουν κενά στις βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και αναζητούν έναν γρήγορο και δομημένο τρόπο για να τα καλύψουν.
- Μαθητές που αντιμετωπίζουν Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά.
- Μαθητές που δεν μένουν στους κανόνες αλλά πηγαίνουν ...πέρα απ' τους κανόνες.
- Ενήλικες που θέλουν να αποκαταστήσουν την κακή σχέση που έχουν με τα Μαθηματικά ανακαλύπτοντας την ουσία τους.
- Γονείς που νιώθουν ανήμποροι να βοηθήσουν τα παιδιά τους στα Μαθηματικά του σχολείου αλλά και της καθημερινότητας.

- Εκπαιδευτικούς που επιλέγουν να εμπλέξουν όλους τους μαθητές στη διαδικασία της μάθησης των Μαθηματικών ανεξάρτητα από την επίδοσή τους.
- Εκπαιδευτικούς που τους αφορά ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνει Μαθηματικά ο κάθε μαθητής τους και αναζητούν εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας (στην περίπτωση που δεν λειτουργούν οι παραδοσιακοί).
- Εκπαιδευτικούς που επιθυμούν να εμβαθύνουν στην ουσία των Μαθηματικών.
- Μαθηματικούς οι οποίοι αναζητούν έναν γρήγορο τρόπο κάλυψης των ελλειμμάτων βασικών μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών των μαθητών τους, ώστε να μπορέσουν να προχωρήσουν στη διδασκαλία των Μαθηματικών ανώτερου επιπέδου.
- Ειδικούς παιδαγωγούς που επιθυμούν ένα πολυχρηστικό εργαλείο με στοχευμένες δραστηριότητες αναφορικά με την προσέγγιση των Μαθηματικών.

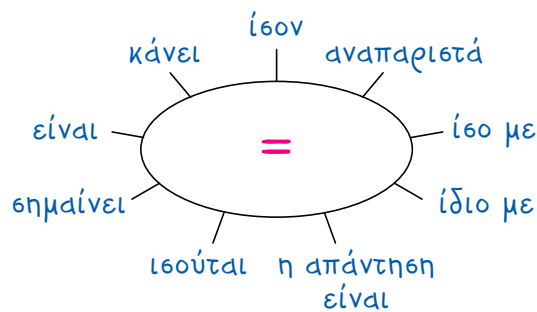
Δρ Γιάννης Καραγιαννάκης

Βιβλιογραφία

- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Desoete, A. (2007). Students with mathematical disabilities in Belgium: from definition, classification and assessment to STICORDI devices. *Advances in Learning and Behavioral Disabilities*, 20, 121-221.
- EACEA/Eurydice (2011). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*.
- Fias, W., Menon, V., & Szűcs, D. (2013). Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 43-47.
- Καραγιαννάκης, Γ. (2014). Ανάπτυξη δοκιμασίας διερεύνησης δυσκολιών στα Μαθηματικά (ανέκδοτη διδακτορική διατριβή). Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.
- Karagiannakis, G. & Baccaglini-Frank, A. (2014). The DeDiMa Battery: A Tool for Identifying Students' Mathematical Learning Profiles. *Health Psychology Review*, 2(4), doi: 10.5114/hpr.2014.46329.
- Karagiannakis, G. & Cooreman, A. (2014). Focused intervention based on a classification MLD model. In S. Chinn (Ed.), *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties* (pp. 265-276). London: Routledge.
- Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8:57, doi:10.3389/fnhum.2014.00057.
- Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. & Roussos, P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 2, 1-27.
- Lewis, K.E. & Fisher, M.B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47, 338-371.
- Szűcs, D. & Goswami, U. (2013). Developmental dyscalculia: Fresh perspectives. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 33-37.

Κεφάλαιο 1

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ & ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ



1.1 Τρόποι αναπαράστασης ενός αριθμού



Η αναπαράσταση και επεξεργασία κάθε αριθμού μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις τρόπους. Πιο συγκεκριμένα, οι μορφές στις οποίες μπορούμε να συναντήσουμε έναν αριθμό είναι οι εξής:

- **Αναλογική μορφή:** ο αριθμός αναπαρίσταται ως **ποσότητα**. Ο μαθητής είτε απεικονίζει έναν αριθμό ως μια συλλογή αντικειμένων (διακριτός τρόπος αναπαράστασης της ποσότητας), είτε τον εντοπίζει πάνω σε μια αριθμογραμμή (συνεχής τρόπος αναπαράστασης της ποσότητας).
- **Αραβική μορφή:** ο αριθμός αναπαρίσταται ως **αραβικό σύμβολο**. Ο μαθητής γράφει και διαβάζει το σύμβολο που αντιστοιχεί σε κάθε αριθμό.
- **Λεκτική μορφή:** ο αριθμός αναπαρίσταται ως **λέξη** (γνωστή και ως **αριθμολέξη**). Ο μαθητής ακούει, προφέρει, γράφει και διαβάζει την αντίστοιχη αριθμολέξη.

Παράδειγμα

- **Αναλογική μορφή:**  ή 
- **Αραβική μορφή:** 
- **Λεκτική μορφή:**  τρία

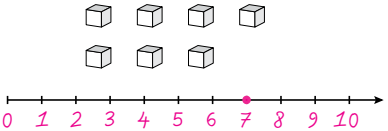
Εποπτικό υλικό:

- > Τριδιάστατες Μονάδες - Δεκάδες - Εκατοντάδες
- > Αριθμογραμμή
- > Αριθμοκάρτες

Δραστηριότητα 1: Αναπαράσταση αριθμού με τις τρεις μορφές

Μπορείς να αναπαραστήσεις τον αριθμό επτά και με τις τρεις μορφές;

Παρατήρησε τον παρακάτω πίνακα.

Αναλογική μορφή	Αραβική μορφή	Λεκτική μορφή
		επτά



Μπορείς να αναπαραστήσεις και άλλους μονοψήφιους αριθμούς με τις τρεις παραπάνω μορφές; Θα σε βοηθήσουν οι τρισδιάστατες Μονάδες (άσπρα κυβάκια), η Αριθμογραμμή και οι Αριθμοκάρτες.



Ο μαθητής αναπαριστά τους αριθμούς και με τις τρεις μορφές και εξοικειώνεται με τη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη, γεγονός που τον οδηγεί στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας των αριθμών. Επιπλέον, οι δραστηριότητες αυτές αποτελούν τη βάση για την κατανόηση περαιτέρω πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών.

1.2 Κατανόηση των σχέσεων μεταξύ Μονάδων-Δεκάδων-Εκατοντάδων (Μ-Δ-Ε)

1.2.1 Η αρχή της ανταλλαγής

Η αρχή της ανταλλαγής είναι ένας από τους βασικότερους μηχανισμούς του Δεκαδικού Συστήματος αρίθμησης. Σύμφωνα με αυτήν, 10 ομοειδή αντικείμενα (π.χ. 10 Μ) μπορούν να ανταλλαχθούν με 1 άλλο αντικείμενο ίσης αξίας (π.χ. 1 Δ). Κατ' αντιστοιχία, 10 Δεκάδες (Δ) μπορούν να ανταλλαχθούν με 1 Εκατοντάδα (Ε), κ.ο.κ.

Εποπτικό υλικό:

- > Καρτέλα «Εκατοντάδες - Δεκάδες - Μονάδες»
- > Τρισδιάστατες Μονάδες - Δεκάδες - Εκατοντάδες
- > Νομίσματα

Δραστηριότητα 2: Οι 10 Μ μπορούν να ανταλλαχθούν με 1 Δ

Μέτρησε τις Μονάδες του εχήματος 1α. Μπορείς να γράψεις τον αντίστοιχο αραβικό αριθμό στο δεξί μέρος της καρτέλας;

Σε κάθε στήλη μπορεί να γραφτεί μόνο ένα ψηφίο. Επομένως ο αριθμός 10 δεν μπορεί να γραφτεί στη στήλη των Μονάδων (σχήμα 1α). Πώς θα τον γράψεις, λοιπόν;



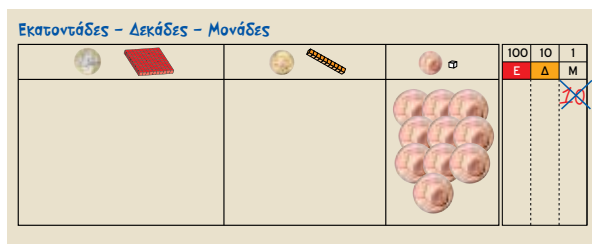
Ένωσε τα 10 άσπρα κυβάκια (10 Μ). Παρατήρησε ότι οι 10 ενωμένες Μονάδες είναι ίσες με 1 πορτοκαλί ράβδο (1 Δ). Αντάλλαξέ τις με αυτήν (σχήμα 1β).

Εκατοντάδες - Δεκάδες - Μονάδες																		
			<table><tr><td>100</td><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>E</td><td>Δ</td><td>Μ</td></tr></table>	100	10	1	E	Δ	Μ									
100	10	1																
E	Δ	Μ																
			<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>															

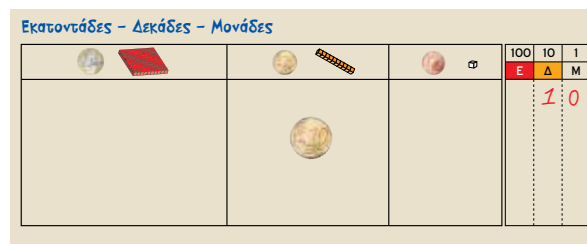
Σχήμα 1α

Εκατοντάδες - Δεκάδες - Μονάδες									
		Ϸ	<table><tr><td>100</td><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>E</td><td>Δ</td><td>M</td></tr></table>	100	10	1	E	Δ	M
100	10	1							
E	Δ	M							
			<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td></td></tr></table>				1	0	
1	0								

Σχήμα 1β



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

Εναλλακτικά, αναπαράστησε κάθε Μονάδα με ένα μονόλεπτο (σχήμα 2α). Τοποθέτησε λοιπόν 10 μονόλεπτα στη στήλη των Μονάδων. Γνωρίζεις ότι 10 μονόλεπτα μαζί έχουν ίση αξία με 1 δεκάλεπτο. Αντάλλαξε λοιπόν τα 10 μονόλεπτα (10 Μ) με 1 δεκάλεπτο (1 Δ) και τοποθέτησε το δεκάλεπτο στην κατάλληλη στήλη της καρτέλας (σχήμα 2β).

Στη συνέχεια γράψε ό,τι βλέπεις στην κατάλληλη στήλη: τον αριθμό 1 στη στήλη των Δεκάδων (αφού βλέπεις 1 ράβδο ή 1 δεκάλεπτο) και το 0 στη στήλη των Μονάδων, αφού δεν βλέπεις πλέον κανένα κυβάκι ή μονόλεπτο (Μ) (σχήμα 1β και 2β).

Δραστηριότητα 3: Οι 10 Δ μπορούν να ανταλλαχθούν με 1 Ε

Μέτρησε τις Δεκάδες του εκήματος 3α. Μπορείς να γράψεις τον αντίστοιχο αριθμό στο δεξί μέρος της καρτέλας;

Σε κάθε στήλη μπορεί να γραφτεί μόνο ένα ψηφίο. Επομένως ο αριθμός 10 δεν μπορεί να γραφτεί στη στήλη των Δεκάδων (σχήμα 3α). Πώς θα τον γράψεις, λοιπόν;

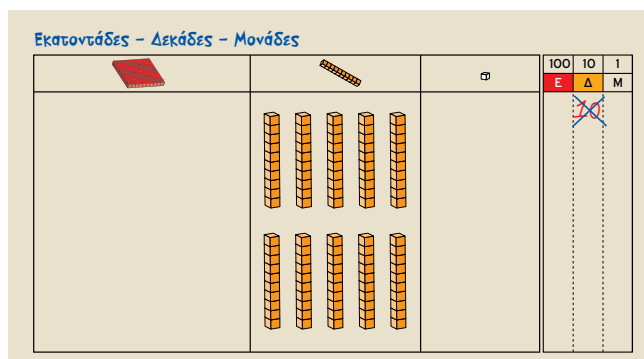


Τοποθέτησε τις 10 ράβδους (10 Δ) τη μία δίπλα στην άλλη. Παρατήρησε ότι οι 10 ενωμένες ράβδοι είναι ίσες με 1 κόκκινη πλάκα (1 Ε). Αντάλλαξέ τις με αυτήν (σχήμα 3β).

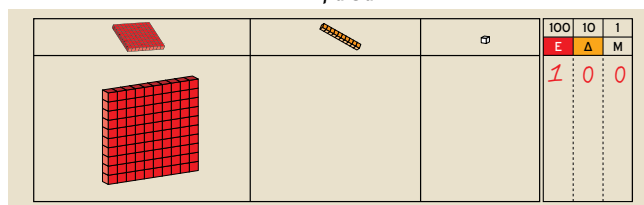
Εναλλακτικά, αναπαράστησε τις Μονάδες χρησιμοποιώντας μονόλεπτα, τις Δεκάδες με δεκάλεπτα και τις Εκατοντάδες με μονόευρα. Βάλε λοιπόν 10 δεκάλεπτα στη δεύτερη στήλη της καρτέλας (σχήμα 4α). Γνωρίζεις

ότι 10 δεκάλεπτα μαζί έχουν ίση αξία με 1 ευρώ. Αντάλλαξε λοιπόν τα 10 δεκάλεπτα (10 Δ) με 1 ευρώ (1 Ε) και τοποθέτησε το ευρώ στην κατάλληλη στήλη της καρτέλας (σχήμα 4β).

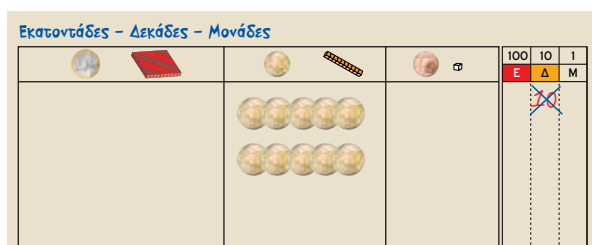
Στη συνέχεια γράψε ό,τι βλέπεις στην κατάλληλη στήλη: τον αριθμό 1 στη στήλη των Εκατοντάδων (αφού βλέπεις 1 πλάκα ή 1 ευρώ), το 0 στη στήλη των Δεκάδων (αφού δεν βλέπεις πλέον καμία ράβδο ή



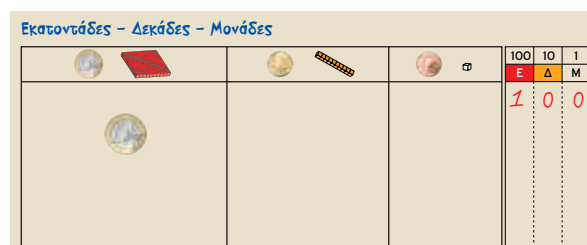
Σχήμα 3α



Σχήμα 3β



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

κανένα δεκάλεπτο) και το 0 στη στήλη των Μονάδων (αφού δεν βλέπεις κανένα κυβάκι ή κανένα μονόλεπτο) (σχήμα 3β και 4β).



Ο μαθητής με τη βοήθεια του υλικού αντιλαμβάνεται τη σχέση μεταξύ Μονάδων και Δεκάδων (ότι δηλαδή 10 Μ ισοδυναμούν με 1 Δ), μεταξύ Δεκάδων και Εκατοντάδων (ότι δηλαδή 10 Δ ισοδυναμούν με 1 Ε), καθώς και τη σχέση μεταξύ Εκατοντάδων και Μονάδων (ότι δηλαδή 1 Ε ισοδυναμεί με 100 Μ).

1.2.2 Ανάλυση αριθμού (Μ-Δ-Ε) – Εντοπισμός του αριθμού σε αριθμογραμμή



Με τον όρο *ανάλυση αριθμού (Μ-Δ-Ε)* εννοούμε την ανάλυση του αριθμού σε Μονάδες, Δεκάδες, Εκατοντάδες, κ.ο.κ. Με τη φράση «εντοπισμός αριθμού σε αριθμογραμμή» εννοούμε την εύρεση του κατάλληλου σημείου της Αριθμογραμμής στο οποίο αντιστοιχεί ο αριθμός.

Εποπτικό υλικό:

- > Καρτέλα «Εκατοντάδες – Δεκάδες – Μονάδες»
- > Τριεδιάστατες Μονάδες – Δεκάδες – Εκατοντάδες
- > Αριθμογραμμή
- > Νομίσματα

Δραστηριότητα 4:

Ανάλυση (Μ-Δ-Ε) διψήφιου αριθμού

Μπορείς να δείξεις τον αριθμό τριάντα πέντε ως ποσότητα και ως αραβικό σύμβολο;



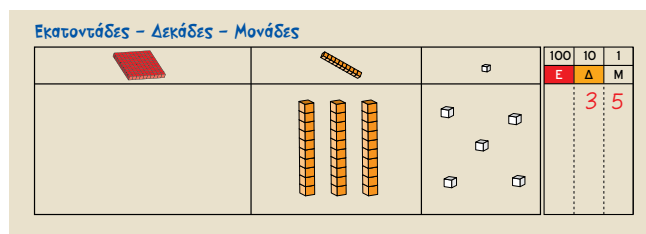
Τοποθέτησε 3 ράβδους (3 Δ) και 5 κυβάκια (5 Μ) στην καρτέλα. **Εναλλακτικά, μπορείς να αναπαραστήσεις τον αριθμό με νομίσματα (βλ. δραστηριότητα 2 και 3).**

Στη συνέχεια γράψε στο δεξί μέρος της καρτέλας ό,τι βλέπεις στην κατάλληλη στήλη: 3 στη στήλη των Δεκάδων και 5 στη στήλη των Μονάδων (σχήμα 5α).

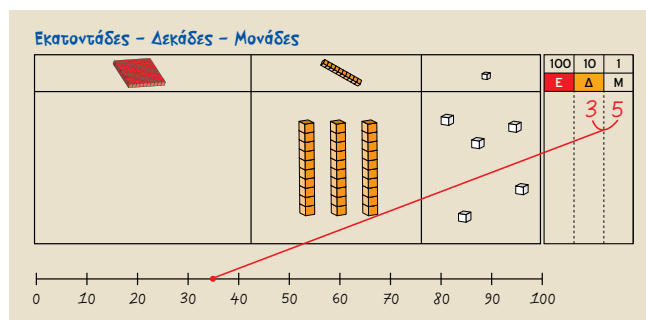
Μπορείς να βρεις «περίπου» σε ποιο σημείο της Αριθμογραμμής αντιστοιχεί ο αριθμός 35;



Επειδή ο αριθμός είναι διψήφιος, συμπλήρωσε το κάτω μέρος της Αριθμογραμμής με τους αριθμούς 0, 10, 20, 30, κ.ο.κ. μέχρι το 100. Αφού ο αριθμός 35 αποτελείται από 3 Δ (ή 30 Μ) αλλά και κάποιες Μονάδες επιπλέον, θα βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 30 και 40 (σχήμα 5β).



Σχήμα 5α



Σχήμα 5β

Δραστηριότητα 5: Ανάλυση (Μ-Δ-Ε) τριψήφιου αριθμού

Μπορείς να δείξεις τον αριθμό διακόσια τριάντα έξι ως ποσότητα και ως αραβικό σύμβολο;



Τοποθέτησε 2 μονόευρα (2 Ε), 3 δεκάλεπτα (3 Δ) και 6 μονόλεπτα (6 Μ) στην καρτέλα. Στη συνέχεια γράψε στο δεξί μέρος της καρτέλας ό,τι βλέπεις στην κατάλληλη στήλη: 2 στη στήλη των Εκατοντάδων, 3 στη στήλη των Δεκάδων και 6 στη στήλη των Μονάδων (σχήμα 6α).